შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7	03.05.2014/ მათ/III/ M340
ამოცანა № 1	გვერდი № 1

$$\sum_{cyc} \frac{a_i^3}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} \geq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2} \iff \sum_{cyc} \frac{a_i^3}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} - a_i \geq -\frac{a_1+\dots+a_n}{2}.$$

$$\iff \sum_{cyc} -\frac{a_i a_{i+1} a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} \geq -\frac{a_1+\dots+a_n}{2} \iff \sum_{cyc} \frac{a_i a_{i+1} a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{2}.$$

ახლა რომ დავამტკიცოთ ეს უტოლობა, ის არის ერთგვაროვანი ანუ ხარისხი ორივე მხარეს ტოლია, ანუ დამოკიდებულება ჩვენი $(a_1;a_2;\dots;a_n)$ რიცხვებისთვის ტოლობის დამოკიდებულება $(ka_1;ka_2;\dots;ka_n)$ რიცხვებისთვის ნებისმიერი $\forall k>0$ -სთვის (~~[illegible]~~ ასევე ეს ნიშნავს, რომ თუ რომ ჩავსვათ $ka_1;ka_2;\dots;ka_n$ k შეიკვეცება და $a_1;a_2;\dots;a_n$ და დავრჩებით უტოლობა) ~~ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ a_1+a_2+~~

ანუ უ.გ. $(a_1a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_na_1+a_na_1a_2) \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{2}(a_1^2+\dots+a_n^2+a_1a_2+\dots$

$a_2a_3+\dots+a_na_1)$

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{2} \geq a_1a_2$$

$$\frac{a_2^2+a_3^2}{2} \geq a_2a_3$$

$\vdots$

$$\frac{a_n^2+a_1^2}{2} \geq a_1a_n$$

$$\Rightarrow a_1^2+\dots+a_n^2 \geq a_1a_2+\dots+a_na_1 \iff a_1^2+\dots+a_n^2+a_1a_2+\dots+a_na_1 \geq 2(a_1a_2+\dots+a_na_1)$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M340

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

$$\sum_{cyc} \frac{a_i a_{i+1} a_{i+2}}{a_i^2 + a_{i+1} a_{i+2}} \le \sum_{cyc} \frac{a_i a_{i+1} a_{i+2}}{2a_i \sqrt{a_{i+1} a_{i+2}}} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sqrt{a_{i+1} a_{i+2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{cyc} \sqrt{a_i a_{i+1}} \le \frac{1}{2} \sum \frac{a_i + a_{i+1}}{2} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

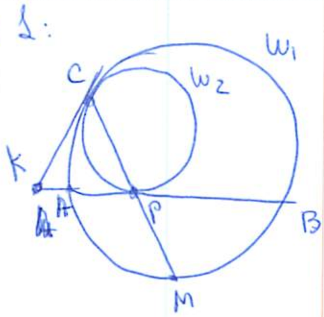
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7	03.05.2014/ მათ/III/ M 340

ამოცანა № 2	გვერდი № 1

ლემა 1:

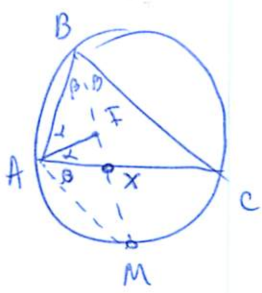


ვთქვათ ω_1 და ω_2 წრეები (ω_2 ω_1-ის შიგნით) ერთმანეთს ეხებიან C-ში. ვთქვათ AB ქორდა ω_1-ს რომელიც ეხება ω_2-ს P-ში მაშინ CP ხაზი გადის $\breve{AB}$-ის შუაწერტილში.

გავავლოთ C-ზე საერთო მხები. შევაერთოთ CP და გავაგრძელოთ ω_1-თან გადაკვეთამდე M-ში. ~~KA~~ $KA = KP$ (ω_2-ის მხებების თვისება) ამიტომ $\angle KCP = \angle KPC$ $\angle KCP = \frac{\breve{AC} + \breve{AM}}{2}$ $\angle KPC = \frac{\breve{AC} + \breve{MB}}{2}$

ანუ $\frac{\breve{AM}}{2} = \frac{\breve{MB}}{2}$ ანუ M შუაწერტილია $\breve{AB}$-ის.

ლემა 2: ვთქვათ $\triangle ABC$ ჩახაზულია ω წრეწირში. მაშინ რომ ავიღოთ $\forall$ ბისექტრისის ω-სთან კვეთა M-ში, ~~BM~~ BM მაშინ $MI = MA = MC$ სადაც I არის ABC-ში ჩახ. წრ-ს ცენტრი



ვაჩვენოთ, რომ $\angle MAI = \angle MIA$ მაშინ გამოვა $AM = MI$ ხოლო $AM = MC$ რადგან M არის $\breve{AC}$-ის შუაში.

$\angle BAI = \angle IAC \equiv \alpha$ $\angle ABI = \angle IBC \equiv \beta$

მაშინ $\angle AIM$ (როგორც გარე კუთხე) $= \alpha + \beta$

ხოლო $\angle CAM = \angle CBM = \beta$ ანუ $\angle IAM = \alpha + \beta$

ანუ $\angle AIM = \angle IAM = \alpha + \beta$. ანუ $AM = IM = MC$.

ახლა ვიწყებ ამოხსნას

$\triangle AXM \sim \triangle BAM$ საიდანაც $AM^2 = MX \cdot MB$

ანუ ფაქტი 1 სხვა სიტყვებში $AM^2 = MX \cdot MB$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

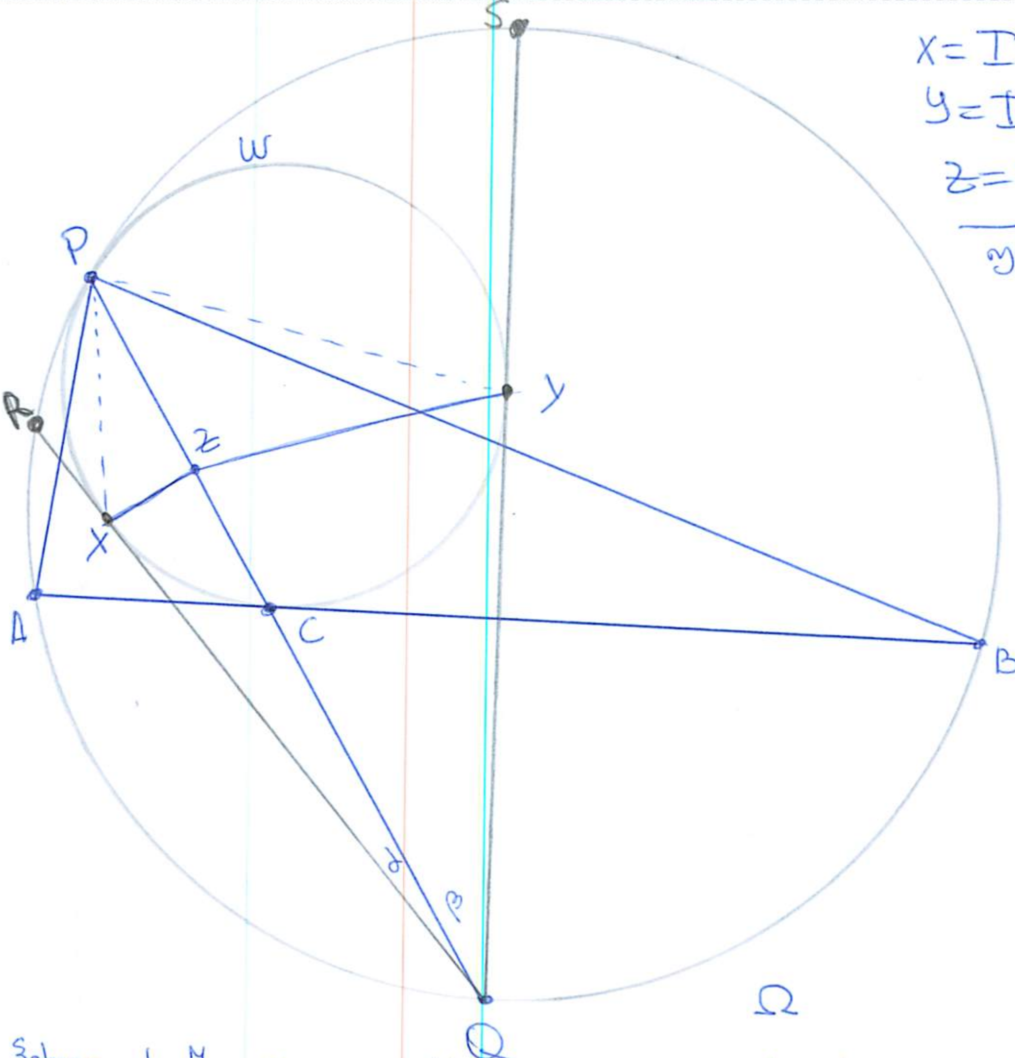
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M340

ამოცანა № 2

გვერდი № 2



$X = I(\triangle ARB)$

$Y = I(\triangle ASB)$

$Z = I(\triangle ABP)$

უ.დ. $\angle PXZ + \angle PYZ = 90°$

რადგან Q არის $\breve{AB}$-ის შუაწერტილი ლემა 1 ის თანახმად (სადაც AB ქორდის შუა)

ვაჩვენოთ, რომ QR კვეთს ω-საც არის X. $CR \cap \omega \equiv L$

ვთქვათ $QL^2 = QC \cdot QP$ (ზემოთ δ მხების თვისება) მაშინ ლემის 1-ით

$QC \cdot QP = AM^2$ ანუ $AM = QL$ მაშინ ლემის 2-ით $AM = QX$

რადგან RQ არის ბისექტრისა ($\breve{AQ} = \breve{QB}$) $\triangle ARB$-ში, $L; X \in RQ$ და $QX = QL$

ე.ი. $X = L$ ანუ ω-ს შეხების წერტილი არის X. დავამტკიცეთ

ნათელია y იქნება QS-ის შუაზე ω-ზე.

ლემა 2-ის გამოყენებით $QA = QX = QZ = QY = QB$.

ვთქვათ $\angle RQP = \alpha$

$\angle SQP = \beta$

$QX = QZ \Rightarrow \angle XZQ = 90 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle XZP = 90 + \frac{\alpha}{2}$

ასევე $QZ = QY \Rightarrow \angle YZP = 90 + \frac{\beta}{2}$

ლემა 1-ით PX არის $\breve{RAQ}$-ის ბისექტრისა ანუ $\angle XPZ = \frac{\breve{RAQ}}{2}$

და ლემა 1-ით PY არის $\breve{QBS}$-ის ბისექტრისა ანუ $\angle YPZ = \frac{\breve{QBS}}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XPZ + \angle YPZ = \angle XPY = \frac{\breve{RAQ} + \breve{QBS}}{2} = \frac{180 - \breve{RPS}}{2} = \frac{180 - \alpha - \beta}{2} =$

$= 90 - \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\quad$ $\square XPYZ$-ში ყველა კუთხის ჯამი არის 360°

$\angle XPY + \angle YZX = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2} + 90 + \frac{\alpha}{2} + 90 + \frac{\beta}{2} = 270^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PXZ + \angle PYZ = 90^\circ$ რ.დ.გ.

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M340

ამოცანა № 3

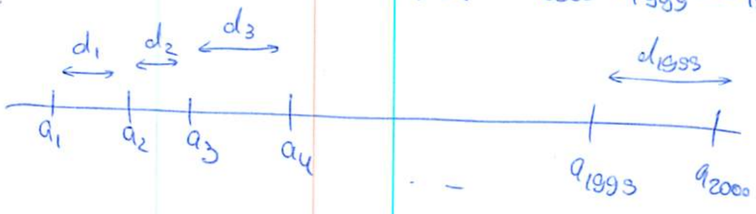
გვერდი № 1

რომ განვიხილოთ ნაკრები $(a_1; a_2; \dots; a_{2000})$ და $(a_1+d; a_2+d; \dots; a_{2000}+d)$ $\forall d \in \mathbb{R}$ სადაც
განსხვავებული არის ეკვივალენტური ისე რომ ~~სხვა არა ი~~ ერთის გარდაქმნებით
მეორის მიიღება და პირიქით. ~~[illegible]~~ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ისეთი
$(a_1; a_2; \dots; a_{2000})$ სადაც, რომ ნამდვილი იყოს ... .

ასევე შეგვიძლია $\forall$ რიცხვზე გამრავლება ისე რომ ვიპოვოთ ისეთი
$(a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{2000})$ რომ $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_{2000}-a_{1999})=1$.

სიზუსტე, ა რიცხვები იყოს $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{2000}$.

$a_2 - a_1 \equiv d_1 \quad a_3 - a_2 \equiv d_2 \quad \dots \quad a_{2000} - a_{1999} \equiv d_{1999}$



ახლა ჩვენ გვაქვს ისეთი $(a; b; c; d)$ რომ $\frac{a-b}{c-d}$ იყოს 1-ის ტოლი
სულ სხვა შესაძლო სხვაობა სიგრძეები არის

$d_1; d_1+d_2; \dots; d_1+d_2+\dots+d_{1999}$
$d_2; d_2+d_3; \dots; d_2+d_3+\dots+d_{1999}$
$\vdots$
$d_{1998}; d_{1998}+d_{1999}$
d_{1999}

სულ არის $\frac{1999 \cdot 2000}{2} = 1999'000$.

ანალოგიურად განვიხილოთ ეს
ყველა რიცხვი რიცხვთა ...

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M340

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

რადგან $a_1+a_2+\dots+a_{1995}=1$ და არ შეიძლება რომ ყველა ეს რიცხვი ჩავარდეს $(0;1]$ ინტერვალში

განვიხილოთ შუალედები: ეს შუალედები

$[\frac{1}{2};1]$, $[\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$, ..., $[\frac{1}{m+1};\frac{1}{m}]$, ...

მაშინ გვექნება სადაც ერთ-ერთში ~~შუალედებს~~ ყველა 1995000 ცალი ეს რიცხვი.

დავაკვირდეთ ფუნქციას $f(x)=\frac{x+a}{x}$ სადაც $a>0$ $D(x)=(0;+\infty)$

მაშინ $f(x)$ არის კლებადი $\boxed{\frac{x+a}{x}>\frac{y+a}{y} \iff y>x}$

ეს 1995000 რიცხვი აღვნიშნოთ $c_1;c_2;\dots;c_{1995000}$ ~~$S_1;S_2;\dots;S_{1995000}$~~ -ით.

ვთქვათ სიტუაცია, როცა $\frac{1}{m+1}\le S_1\le\frac{1}{m}$ სადაც $\underline{n\ge m+1}$

$\frac{1}{n+1}\le S_2\le\frac{1}{n}$

მაშინ $\frac{n}{m+1}\le\frac{S_1}{S_2}\le\frac{n+1}{m}$ $n\ge m+1$ რომ $\frac{S_1}{S_2}\ge 1$

ახლა შევაფასოთ ზემოდან $\frac{n+1}{m}\le 1+\frac{1}{105} \iff m\ge\frac{n+1}{1+\frac{1}{105}}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M 340

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

სულ გვქონდა $\left[\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}\right]$ ინტერვალში არის x ცალი წერტი.

მაშინ ვიპოვოთ $\max\{x\}$-ის მნიშვნელობა

თუ x წერტი $\exists\, a; b$ რომ $b-a < \dfrac{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}}{x}$

მაშინ $\dfrac{b}{a} < \dfrac{a+\frac{1}{m(m+1)x}}{a}$ რომელსაც ვაქვთ

$f(x) = \dfrac{x+d}{x}$ არის კლებადი ფუნქცია

$$\frac{a+\frac{1}{m(m+1)x}}{a} \le \frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m(m+1)x}}{\frac{1}{m+1}} = \cancel{1+\frac{1}{mx}}\ 1+\frac{1}{mx}$$

$$1+\frac{1}{mx} < 1+\frac{1}{10^5} \iff \frac{1}{mx} \le \frac{1}{10^5} \qquad mx \ge 10^5$$

$x \ge \dfrac{10^5}{m}$ ანუ თუ რაოდენობა $\left(\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}\right]$ ში

იქნება $\left[\dfrac{10^5}{m}\right]+1$ წერტი მაშინ აუცილებლად მოიძებნება ოთხეული

$(a; b; c; d)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/M340

ამოცანა № 3

ჯამში

$\{\frac{1}{2};1\}$ -ში არის მაქსიმუმ 10^5 ცალი წევრი

$\{\frac{1}{3};\frac{1}{2}\}$ $\frac{10^5}{2}$

$\{\frac{1}{4};\frac{1}{3}\}$ $\frac{10^5}{3}$

$\{\frac{1}{5};\frac{1}{4}\}$ $\frac{10^5}{4}$.

⋮

როგორც ვხედავთ 2-ზე მეტი ~~ჩავთვლ~~

განვიხილოთ $n = m+x$

$m \geq \frac{m+x+1}{1+\frac{1}{10^5}}$ $m \geq 10^5(x+1)$

თუ არ მოვძებნეთ ისეთ 2 წევრს რომ $a;b$

$\frac{1}{m+1} \leq a \leq \frac{1}{m}$

$\frac{1}{m+x+1} \leq b \leq \frac{1}{m+x}$

რომ ~~როცა~~ $m \geq 10^5(x+1)$ მაშინ

მიიღება მოდული

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 7

03.05.2014/ მათ/III/ M340

ამოცანა № 3

გვერდი № 5

აქ ვიხილოთ შუალედები ეს $[\frac{1}{2}; 1]; [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}], \dots$

ისე, სადაც $[\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}]$ სადაც v რიცხვი ~~[illegible]~~ ვიხილოთ რაოდენობა

სანამ რიცხვების რაოდენობა ბევრი დიდია 1998000

და ყველა შუალედებში მაქსიმუმ რიცხვი შეიძლება იყოს

$$\frac{10^5}{2}+\frac{10^5}{3}+\dots+\frac{10^5}{10^5} < 1993000$$

ხოლო $[\frac{1}{10^5+1}; \frac{1}{10^5}]$ შუალედში ერთი მაქსიმუმ

1 წერტ შეიძლება იყოს